

اعداد اول

به نام خدا

در ابتدای این فصل می‌فوییم درباره اعداد اول صحبت کنیم ولی قبل از اون بهتره یه یادآوری درباره شمارنده‌ها داشته باشیم:

شمارنده: شمارنده رو با یه مثال براتون توضیح میدم.

عدد ۲۰ رو در نظر بگیرید، این عدد به چه اعدادی بخشپذیره؟

۱ - ۲ - ۴ - ۵ - ۱۰ - ۲۰

یعنی آگه عدد ۲۰ رو به هر کدوم از اینها تقسیم کنیم باقیمانده تقسیم، برابر صفر میشه. به این اعداد شمارنده‌های عدد ۲۰ می‌گیم. (به شمارنده، مقسوم علیه هم می‌گن)

در این قسمت می‌فوییم با سه دسته از اعداد آشنا بشیم.

۱. اعداد اول

۲. اعداد مرکب

۳. اعدادی که نه اول هستن و نه مرکب

حالا بیایم این سه دسته رو تعریف کنیم:

عدد اول:

عددی که غیر از خودش و ۱ به هیچ عدد دیگه ای بخشپذیر نیست، یعنی غیر از خودش و ۱ شمارنده (مقسوم علیه) دیگه ای نداشته، مثل اعداد زیر:

۱ - ۲ - ۳ - ۵ - ۷ - ۱۱ - ۱۳ - ۱۷ - ۱۹ - ...

الان همه این اعداد فقط به خودشون و ۱ بخشپذیرن.

عدد مرکب:

عددی که غیر از خودش و ۱ شمارنده های دیگه هم داشته باشه. مثلا همون عدد ۲۰ که توی تعریف شمارنده مثال زدیم، غیر از ۲۰ و ۱ باز هم شمارنده داشت مثلا ۱۰ و ۵ و ۴ و ۲. بنابراین ۲۰ یک عدد مرکب محسوب میشه.

حالا نوبت دسته سوم میرسه. به نظرتون عددی هست که نه اول باشه نه مرکب؟ فقط یه عدد با این خصوصیت وجود داره، اونم عدد یکه. بنابراین:

"عدد ۱ تنها عددی است که نه اول است نه مرکب"

تجزیه اعداد مرکب

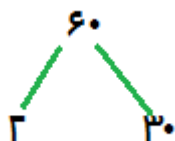
حالا که با اعداد اول و مرکب آشنا شدیم، میفویایم بینیم چطوری می تونیم یه عدد رو به شمارنده های اول تجزیه کنیم. برای این کار از درخت تجزیه استفاده می کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم عدد ۶۰ رو به شماره‌ها اول تجزیه کنیم؛
 اولین کاری که می‌کنیم اینه که دو عدد پیدا کنیم که حاصلضربشون بشه ۶۰.
 ممکنه عددهای مختلفی پیدا بشه که ضربشون ۶۰ باشه ولی مهم نیست که کدوم رو
 انتخاب کنید چون در نهایت نتیجه‌ها با هم برابر میشه

مثلا می‌کنیم

$$60 = 2 \times 30$$

عدد ۶۰ رو می‌نویسیم، دو تا شافه بهوش وصل می‌کنیم و این دو تا عدد رو پایین شافه
 ها می‌نویسیم، به این صورت:



حالا باید همین کار رو واسه این دو تا عدد انجام بدیم.

دنبال دو تا عدد می‌گردیم که ضربشون ۲ بشه، چه عددایی داریم؟

فقط این حالت وجود داره

$$2 = 2 \times 1$$

وقتی به این نقطه می‌رسیم دیگه این شافه رو ادامه نمیدیم، چون به یه عدد اول
 رسیدیم.

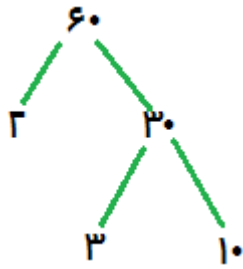
"وقتی به عدد اول رسیدیم دیگه شافه رو ادامه نمیدیم"

پس میریم سراغ عدد بعدی، یعنی ۳۰. دو تا عدد پیدا می‌کنیم که ضربشون بشه ۳۰.

مثلا می‌کنیم:

$$۳۰ = ۳ \times ۱۰$$

دو تا شافه به ۳۰ وصل می‌کنیم و این دو تا عدد رو پایین شافه‌ها می‌نویسیم، به صورت زیر:

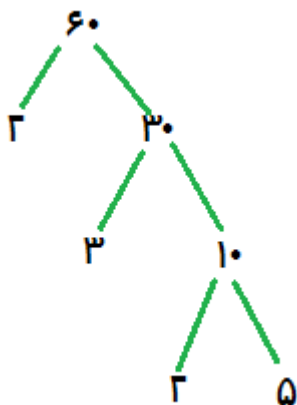


الان دو تا عدد داریم، یکی ۳ و یکی ۱۰ .

می‌دونیم که ۳ یک عدد اوله و دیگه نمی‌تونیم ادامه‌ش بدیم، یعنی دیگه تجزیه نمیشه. عدد ۱۰ چی؟ آیا می‌تونیم دو تا عدد پیدا کنیم که ضربشون ۱۰ بشه؟ بله

$$۱۰ = ۲ \times ۵$$

اینا رو هم با دو تا شافه به ۱۰ وصل می‌کنیم، ببینید:

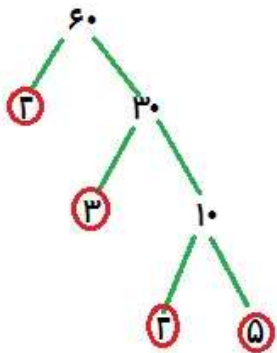


آیا ۲ رو می‌تونیم تجزیه کنیم؟ نه، چون عدد اوله

آیا ۵ رو می‌تونیم تجزیه کنیم؟ نه، چون عدد اوله

پس ما دیگه نمی‌تونیم در فتمون رو ادامه بدیم.

در گام آخر، میایم دور اعدادی که دیگه قابل تجزیه نبودن فط می‌کشیم. به اینها برگ درخت میگن، یعنی دیگه هیچ شاخه‌ای در ادامه‌شون نیومده:



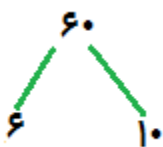
بنابراین تجزیه ۶۰ به اعداد اول به صورت زیر میشه:

$$60 = 2 \times 3 \times 2 \times 5$$

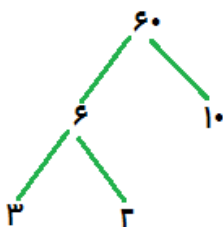
بازم تاکید میکنم ما فقط دور اعدادی فط می‌کشیم که دیگه بعدشون شاخه‌ای نیومده باشه، مثلا ۱۰ یا ۳۰ رو نمی‌تونیم بنویسیم چون بعدشون شاخه داریم.

اگه یادتون باشه گفتیم که مهم نیست دو تا عددی که انتخاب می‌کنیم چیا باشن، در نهایت نتیجه تجزیه برابره. ببینیم واقعا اینجوری هست یا نه!

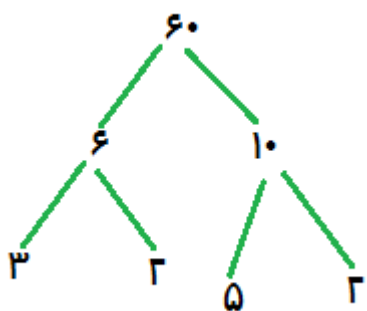
فرض کنیم در ابتدا ۶۰ رو به صورت 6×10 می‌نوشتیم، در اینصورت در فتمون به صورت زیر میشه:



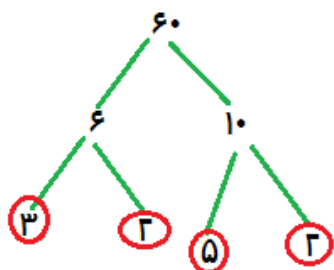
حالا دو تا عدد پیدا می‌کنیم که ضربشون ۶ بشه. داریم $۲ \times ۳ = ۶$ ، پس در ادامه درختمون این دو تا شاخه رو می‌کشیم:



به اعداد ۲ و ۳ رسیدیم که اول هستن، بنابراین درخت رو از سمت اینا نمی‌تونیم ادامه بدیم. میریم سراغ ۱۰، دو تا عدد پیدا می‌کنیم که حاصلضربشون ۱۰ بشه، داریم $۲ \times ۵ = ۱۰$. به درختمون اضافه می‌کنیم:



به عدد های ۲ و ۵ رسیدیم و چون اول هستن نمی‌تونیم درخت رو ادامه بدیم. حالا دور برگزای درختمون فقط می‌کشیم، یعنی همون عدد هایی که در ادامه شون شاخه ای نداریم:



پس داریم:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

می‌بینیم که نتیجه با اونی که بالا به دست آوردیم یکی شد. پس تجزیه رو با هر اعدادی که ادامه بدیم در نهایت نتیجه یکسان میشه.

اگه دوست داشتید فوتون $15 \times 4 = 60$ رو امتحان کنید و ببینید که نتیجه باز هم همین میشه.

ب ۴۴

در قسمت قبل تجزیه کردن اعداد رو یاد گرفتیم، در این قسمت می‌فوییم یاد بگیریم که بطوری ب ۴۴ دو عدد رو به دست بیاریم.

برای به دست آوردن ب ۴۴ باید ابتدا دو عدد رو تجزیه کنیم.

مثلا فرض کنید می‌فوییم ب ۴۴ دو عدد ۱۸ و ۳۰ رو بنویسیم، اول تجزیه شده این دو تا عدد رو می‌نویسیم (از درخت تجزیه استفاده می‌کنیم):

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

حالا دنبال اعداد مشترک بین تجزیه شده این دو عدد می‌گردیم.

بالا ۲ داریم پایین هم ۲ داریم، پس فعلا ۲ رو جلوی ب ۴۴ می‌نویسیم:

$$۴۴ = ۲ \times \dots$$

این سه تا نقطه که جلوی \times گذاشتیم، به این معنیه که هنوز کارمون تموم نشده.

برای اینکه در پیدا کردن اعداد مشترک دچار اشتباه نشیم، هر عددی مشترکی رو که پیدا کردیم و جلوی ب ۴۴ نوشتیم، در بالا و پایین فطش می‌زنیم، اینجا ۲ رو نوشتیم پس هم در ۳۰ و هم در ۱۸ فطش می‌زنیم:

$$۱۸ = \cancel{۲} \times ۳ \times ۳$$

$$۳۰ = \cancel{۲} \times ۳ \times ۵$$

آیا باز هم عدد مشترک داریم؟ بله ۳. پس ۳ رو جلوی ب ۴۴ می‌نویسیم و در بالا و پایین اونو فط می‌زنیم:

$$۴۴ = ۲ \times ۳ \times \dots$$

$$۱۸ = \cancel{۲} \times \cancel{۳} \times ۳$$

$$۳۰ = \cancel{۲} \times \cancel{۳} \times ۵$$

آیا بین اعداد باقیمانده، باز عدد مشترک داریم؟ نه. پس اعدادی که جلوی ب ۴۴ نوشتیم رو در هم ضرب می‌کنیم تا جواب نهایی به دست بیاد:

$$۴۴ = ۲ \times ۳ = ۶$$

بنابراین بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب ۴۴) دو عدد ۱۸ و ۳۰ برابر ۶ هست.

یه مثال دیگه:

ب ۴۴ دو عدد ۹۰ و ۶۰ رو به دست بیارید:

اول دو تا عدد رو تجزیه می‌کنیم:

$$۶۰ = ۳ \times ۲ \times ۵ \times ۲$$

$$۹۰ = ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۲$$

به دنبال اعداد مشترک می‌گردیم، بالا ۳ داریم پایین هم ۳ داریم، پس ۳ رو جلوی ب ۴ می‌نویسیم و اون رو هم در بالا و هم در پایین فط می‌زنیم:

$$۴ \text{ ب } ۴ = ۳ \times \dots$$

$$۶۰ = \cancel{۳} \times ۲ \times ۵ \times ۲$$

$$۹۰ = \cancel{۳} \times ۳ \times ۵ \times ۲$$

به اعداد باقی‌مونده نگاه می‌کنیم، باز هم عدد مشترک داریم؟ بله ۲. پس ۲ رو جلوی ب ۴ می‌نویسیم و اون رو هم در بالا و هم در پایین فط می‌زنیم:

$$۴ \text{ ب } ۴ = ۳ \times ۲ \times \dots$$

$$۶۰ = \cancel{۳} \times \cancel{۲} \times ۵ \times ۲$$

$$۹۰ = \cancel{۳} \times ۳ \times ۵ \times \cancel{۲}$$

آیا بین اعداد باقیمونده، عدد مشترک داریم؟ بله ۵. پس ۵ رو جلوی ب ۴ می‌نویسیم و اون رو هم در بالا و هم در پایین فط می‌زنیم:

$$۴ \text{ ب } ۴ = ۳ \times ۲ \times ۵ \times \dots$$

$$۶۰ = \cancel{۳} \times \cancel{۲} \times \cancel{۵} \times ۲$$

$$۹۰ = \cancel{۳} \times ۳ \times \cancel{۵} \times \cancel{۲}$$

آیا بین اعداد باقی‌مونده، عدد مشترک وجود داره؟ نه. پس اعداد جلوی ب ۴ رو در هم ضرب می‌کنیم و جواب نهایی رو به دست میاریم:

$$۴۴ ب = ۳ \times ۲ \times ۵ = ۳۰$$

ب ۴۴ دو عدد رو به صورت زیر نمایش میدیم:

$$(۹۰, ۶۰) = ۳۰$$

پس ب ۴۴ دو عدد ۹۰ و ۶۰ برابر ۳۰ هست.

حالا که یاد گرفتیم ب ۴۴ دو عدد رو مناسبه کنیم، میفوییم یه مطلب جدید بگیریم، میفوییم بینیم چه زمان دو عدد نسبت به هم اول هستن:

میگیم دو تا عدد نسبت به هم اول هستن اگه:

ب ۴۴ اون دو عدد برابر با ۱ باشه.

حالا چه زمان این اتفاق میفته؟

دیدیم که ما برای به دست آوردن ب ۴۴ دو عدد، به دنبال عددهای مشترک در تجزیه اون دو عدد میگردیم، پس زمانی دو عدد نسبت به هم اول هستن که هیچ عدد مشترکی بین تجزیه هاشون وجود نداشته باشه.

مثلا دو تا عدد ۱۸ و ۳۵ رو در نظر بگیرید، تجزیه هاشون به صورت زیر همیشه:

$$۱۸ = ۲ \times ۳ \times ۳$$

$$۳۵ = ۷ \times ۵$$

برای اینکه ب ۴۴ بین این دو عدد رو به دست بیاریم باید بین تجزیه ها به دنبال عدد مشترک باشیم ولی عدد مشترکی وجود نداره پس ب ۴۴ این دو عدد برابر ۱ هست.

$$(18, 35) = 1$$

یعنی ۱۸ و ۳۵ نسبت به هم اول هستند

حل تمرین صفحه ۲۳

تمرین



۱- برای تساوی روبه‌رو، چهار پاسخ مختلف به دست آورید. $(4 \text{ و } \square) = 1$

چهار تا عدد می‌فروایم که نسبت به ۴ اول باشند.

$$(3, 4) = 1$$

$$(5, 4) = 1$$

$$(7, 4) = 1$$

$$(9, 4) = 1$$

۵- مجموع دو عدد اول ۹۹ است. آن دو عدد را مشخص کنید و توضیح دهید که چگونه آنها را پیدا کردید.

جمع دو عدد شده ۹۹، این عددها زوجین یا فرد؟

آگه دو عدد هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، مجموعشون زوج همیشه

پس وقتی مجموع دو عدد فرد شده ، هتما یکی زوج و یکی فرد

پس تا اینجا فهمیدیم این دو عددی که داریم دنبالشون میگردیم، یکیشون زوج و یکیشون فرد

حالا سوال گفته این دو عدد اول هستن،

کدوم عددی هست که هم زوج هم اوله؟ فقط ۲

پس یکی از عددها رو پیدا کردیم، عدد ۲

بنابراین عدد دیگه مون ۹۷ هست.

$$۲ + ۹۷ = ۹۹$$

ادامه تمرینها رو می تونید در " کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال " ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam8

برای دریافت جزوات سایر پایه ها ، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.